Polskie Forum Psychologiczne, 2020, tom 25, numer 1, s. 5–20
DOI: 10.14656/PFP20200101

ARTYKUŁY
[*Articles*]

JAK UMYSŁ PRZETWARZA UŁAMKI? POZNAWCZE REPREZENTACJE LICZB NIECAŁKOWITYCH

Małgorzata Gut[1], Rafał Wróblewski

HOW DOES THE MIND PROCESS THE FRACTIONS?
THE COGNITIVE REPRESENTATIONS OF FRACTIONAL NUMBERS

Summary. The issues of mental representations of numbers, their development and neuronal base are well known and documented in literature. The results of studies on this question have revealed a clear and pronounced relationship between cognitive representations of numbers and space, what is reflected in the metaphor of Mental Numbers Line, where the numbers are spatially arranged. However, the wide range of study reports concern mainly integers (whole numbers) and similar studies focused on the mental representation of fractions are small as well as they provide the inconclusive findings. Here we present a review of the literature concerning this problem with the reference to neuronal and behavioral of mental representations of fractions and experimental methods used in these studies. Moreover, we suggest some questions, which may be a starting point for further research.
Key words: numerical cognition, SNARC, fractions, mathematical abilities

Wprowadzenie

Bodźce wzrokowe i słuchowe składające się na otaczającą nas rzeczywistość mają swoje reprezentacje w umyśle, dzięki czemu możliwe jest ich przetwarzanie poznawcze i wykorzystywanie w przeprowadzaniu nawet bardzo złożonych operacji mentalnych. Reprezentacje te z kolei mają swoje neuronalne podłoże, co

[1] Wydział Filozofii i Nauk Społecznych, Instytut Psychologii, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu (Faculty of Philosophy and Social Sciences, Institute of Psychology, Nicolaus Copernicus University in Torun), ORCID: 0000-0001-6540-7192.

Adres do korespondencji: Małgorzata Gut,
e-mail: mgut@umk.pl

oznacza, że specyficzne aktywacje poszczególnych struktur mózgowych warunkują sprawne operowanie poznawczymi reprezentacjami obiektów, pojęciami, znaczeniami. Nie są pod tym względem wyjątkiem liczby, które również mają swoje umysłowe reprezentacje, a poszczególne ich typy kolejno kształtują się w rozwoju w rezultacie dojrzewania obszarów mózgu kluczowych dla przetwarzania materiału numerycznego i połączeń między nimi, jak również wskutek doświadczeń z liczbami (von Aster, Shalev, 2007). O ile na temat specyfiki umysłowych reprezentacji liczb całkowitych wiadomo już bardzo dużo, o tyle charakter reprezentacji poznawczych i sposoby przetwarzania ułamków wciąż pozostają słabo poznane, a wyniki badań skłaniają do dyskusji. Trudności w rozumieniu i operowaniu takimi szczególnymi wartościami liczbowymi, obserwowane nie tylko u dzieci na etapie edukacji szkolnej, ale nawet u niektórych dorosłych, prowadzą do stwierdzenia, że operowanie ułamkami w umyśle jest procesem dalece odmiennym od tego, który dotyczy liczb całkowitych. Badania nad ich przetwarzaniem poznawczym mogą nie tylko rzucić szersze światło na procesy poznawcze zaangażowane w operacje na liczbach, ale też zaowocować wiedzą znajdującą zastosowanie w praktykach edukacyjnych w zakresie nauki ułamków w szkole.

Z badań nad poznaniem matematycznym wiadomo między innymi, że istnieje bardzo ścisły związek między umysłowymi reprezentacjami liczb i przestrzeni, co ilustruje koncepcja uporządkowania liczb na tzw. Mentalnej Osi Liczbowej. Wyniki tych badań dotyczą jednak znowu głównie liczb całkowitych, zaś analogiczne badania nad poznawczymi reprezentacjami ułamków są nieliczne i dają niejednoznaczne rezultaty. Niniejszy artykuł stanowi więc próbę przeglądu dotychczasowej literatury dotyczącej tego tematu z odniesieniem do neuronalnych i behawioralnych korelatów mentalnych reprezentacji liczb niecałkowitych, jak również metod ich badania. Stawiane są też pytania mogące stanowić punkt wyjścia do dalszych dociekań w tym zakresie.

Mentalne reprezentacje liczb

Modele reprezentacji i przetwarzania liczb

Mentalną organizację informacji numerycznej opisują neuropsychologiczne modele reprezentacji liczb, zgodnie z którymi moduły odnoszące się do poznawczego przetwarzania liczb i dokonywania obliczeń umiejscowione są zarówno w lewej, jak i prawej półkuli mózgowej (Dehaene, 1992). Wyróżnia się cztery obecnie najważniejsze modele opierające się na przetwarzaniu liczb. Są nimi: ogólny model przetwarzania liczb i obliczeń McCloskeya, trójkodowy model Dehaene'a, hipoteza złożonego kodowania Campbella i Clarka oraz hipoteza preferowanego kodu wejściowego Noël i Serona.

Model McCloskeya jest związany z pojęciem abstrakcyjnej, semantycznej reprezentacji wewnętrznej liczb (McCloskey, Caramazza, Basili, 1985). Zgodnie z nim zewnętrzna jej postać (przedstawiana w postaci słowa lub cyfry) jest zamieniana na reprezentację wewnętrzną. Dehaene i Cohen (1995) zaproponowali z kolei model potrójnego kodowania, który zakłada istnienie trzech typów reprezentacji liczb: w zapisie słownym (np. „trzy"), zapisie arabskim (np. „3") oraz analogowej reprezentacji wielkości (np. „***"). Każde zadanie poznawcze o charakterze matematycznym jest przetwarzane za pomocą odpowiedniego typu reprezentacji. Według hipotezy złożonego kodowania Campbella i Clarka (1988) liczby aktywują zintegrowaną sieć wielu reprezentacji liczbowych. W ten sposób jedna liczba może spowodować wytworzenie wielu różnych reprezentacji. Natomiast Noël i Seron (1993), w porównaniu do propozycji Campbella i Clarka, zakładają w swojej hipotezie preferowanego kodu wejściowego, że istnieją tylko dwie reprezentacje: słowna i cyfr arabskich. Każdy człowiek wykorzystuje tylko jedną, preferowaną przez siebie reprezentację do przetwarzania wartości liczbowych.

Zależności numeryczno-przestrzenne

Zgodnie z modelem trójkodowym reprezentacje liczbowe mają między innymi charakter przestrzenny. Badacze zakładają, że wartości liczbowe są reprezentowane w kontinuum liczb rzeczywistych wzdłuż analogowej Mentalnej Osi Liczbowej (ang. *Mental Number Line*, MNL), dając fundamenty pod myślenie numeryczne (Dehaene i in., 1998).

Uwarunkowania biologiczne kompetencji numerycznych. Założenie Dehaene'a i Cohena przeczy wcześniejszemu postrzeganiu umysłowych reprezentacji liczbowych jako będących ściśle związanych z językiem. Ich zdaniem, podstawowe rozumienie liczb powinno być obecne również u zwierząt (Dehaene, 2005).

I faktycznie, okazuje się, że zwierzęta potrafią np. porównać liczbę przeciwników z liczbą członków swojego stada. Szczury, gołębie, małpy, lwy, ryby czy nawet pszczoły potrafią przetwarzać materiał numeryczny (Gross i in., 2009; Trojan, 2013), a trzydniowe kurczęta kojarzą mniejsze liczebności z lewą stroną, a większe z prawą (Rugani i in., 2015). Podobnych danych dostarczają badania z udziałem niemowląt (Dehaene i in., 2005). Oznacza to w takim razie, że podłoże przetwarzania liczb, jak również zależności numeryczno-przestrzennych jest zdeterminowane biologicznie. Dowodem na to jest też fakt, że zarówno u ludzi, jak i u innych naczelnych neurony odpowiedzialne za przetwarzanie reprezentacji liczb są położone blisko neuronów odpowiedzialnych za przenoszenie uwagi w przestrzeni (przegl. Hubbard i in., 2005).

Neurobiologiczne podłoże. Wyniki zarówno badań klinicznych, jak i eksperymentów z udziałem zdrowych ochotników potwierdzają, że zależności numeryczno-przestrzenne mają swój neuronalny ośrodek głównie w korze ciemieniowej, zaś najistotniejszą rolę w operowaniu przestrzennymi reprezentacjami liczb odgrywa bruzda śródciemieniowa. Jest ona aktywowana podczas różnorodnych zadań z przetwarzaniem liczb, ale w szczególności tych, w których kluczowe jest bazowanie na MNL (Dehaene i in., 2004). Wyróżnia się dodatkowo jej boczną i brzuszną część. Ta pierwsza odpowiedzialna jest za przesunięcia uwagi, sakkadyczne ruchy gałek ocznych oraz aktualizację informacji przestrzennej. Z kolei brzuszna jej część angażuje modalności: wzrokową, słuchową i dotykową w reakcji na ruch (przegl. Hubbard i in., 2005). Dodatkowo, jak wykazały badania z wykorzystaniem neuroobrazowania, powierzchnia horyzontalnej bruzdy śródciemieniowej (ang. *Horizontal IntraParietal Sulcus*, HIPS) związana jest z przetwarzaniem liczb, zaś zakręt przedśrodkowy oraz dolny zakręt czołowy są zaangażowane w obliczenia mentalne. Ich udział zmienia się pod presją czasu, natomiast aktywacja HIPS jest zależna od liczby używanych do obliczeń operandów (Menon i in., 2000).

Badania behawioralne. Wyniki badań behawioralnych, z pomiarem czasu i poprawności reakcji, również wskazują na istnienie zależności numeryczno-przestrzennych i udowadniają zarazem rozmieszczenie reprezentacji wartości liczb wzdłuż MNL. Jednym z efektów, który go ilustruje, jest tzw. efekt dystansu. Pokazuje on, że trudniej jest porównać liczby o zbliżonej wartości liczbowej (różnica między nimi jest mała) niż takie, których wartości są na MNL odległe (Moyer, Landauer, 1967). Dodatkowo trudność ta wzrasta, gdy rośnie wartość liczbowa porównywanych liczb i jest to tzw. efekt wielkości (Buckley, Gillman, 1974). Efekt dystansu wskazuje na istnienie MNL, zaś efekt wielkości wynika z faktu, że MNL lepiej reprezentuje małe wartości liczbowe niż te większe (Verguts, van Opstal, 2005). Wiadomo też, że siła efektu dystansu maleje wraz z wiekiem (Moyer, Landauer, 1967).

Henik i Tzelgov (1982) odkryli również tzw. efekt zgodności wielkości (ang. *Size Congruency Effect*, SiCE). Efekt ten jest odwzorowaniem fenomenu Stroopa odzwierciedlającego wpływ irrelewantności do zadania na intencjonalne przetwarzanie bodźców podczas porównywania dwóch wartości liczbowych. Dłuższy czas reakcji (ang. *Reaction Time*, RT) w warunku niekongruentnym (np. 3 5) w porównaniu z warunkiem kongruentnym (np. 3 5) wskazuje, że wartość liczbowa liczb całkowitych jest przetwarzana automatycznie.

Efekt SNARC

Badania nad efektem SNARC

Kolejnym dowodem potwierdzającym istnienie zależności numeryczno-przestrzennych jest efekt SNARC (ang. *Spatial-Numerical Association of Response Codes*). Polega on na wywoływaniu szybszej reakcji po prawej stronie w odpowiedzi na większe wartości liczbowe, a po lewej, gdy są to liczby o mniejszej wartości (Dehaene, Bossini, Giraux, 1993).

Odkryty przez Dehaene'a i współpracowników efekt zainspirował wielu naukowców do badań nad nim. Nuerk, Wood i Willmes (2005) wykazali, że występowanie efektu jest niezależne od modalności (liczby były prezentowane wzrokowo czy słuchowo). Dodatkowo efekt obecny jest też podczas reakcji stopami (Schwarz, Müller, 2006) oraz poprzez ruch oczu (Schwarz, Keus, 2004). Badania nad efektem SNARC dotyczą głównie liczb, można go jednak zaobserwować, zwracając uwagę osobie badanej na przestrzenną organizację innych kategorii bodźców, np. liter czy dni tygodnia (Gevers, Reynvoet, Fias, 2003).

Uwagowy efekt SNARC

Fischer i współpracownicy (2003) w zastosowanym w ich badaniach paradygmacie użyli cyfr jako bodźców poprzedzających bodźce – cele wymagające reakcji i wykazali, że centralnie prezentowana cyfra w zależności od wartości liczbowej mimowolnie przesuwa uwagę badanych w prawo lub w lewo zgodnie z jej lokalizacją na MNL. To zjawisko sugeruje aktywację pod wpływem prezentacji cyfry ośrodków odpowiadających za przetwarzanie liczb oraz wewnętrzną i zewnętrzną reprezentację przestrzeni. Dowodzi to, że przestrzennie zorganizowana MNL jest automatycznie aktywowana za każdym razem, kiedy patrzymy na liczby. Przesunięcie ogniska uwagi w reprezentacji umysłowej powoduje więc przesunięcie w polu widzenia.

W badaniach z wykorzystywaniem zadania z bisekcją odcinka (Calabria, Rossetti, 2005) dowiedziono że, gdy ów odcinek prezentowany badanemu skonstruowano z liter tworzących połączone ze sobą nazwy liczebnika odpowiadającego liczbom o niskiej wartości liczbowej (np. twotwotwotwo…), badani zaznaczali jego środek przesunięty w lewą stronę względem właściwego środka. Z kolei gdy odcinek skonstruowano z ciągu liter będących liczebnikami odpowiadającymi liczbom o wyższej wartości (ninenineninenine), badani wskazywali środek przesunięty – względem rzeczywistego punktu podziału na pół – w stronę prawą. To samo dotyczyło odcinków wyświetlanych jako ciąg cyfr arabskich. Dowodzi to, że automatyczne przetwarzanie liczb wpływa na wizualno-motoryczne aspekty zachowania.

Ułamki

Mentalne reprezentacje ułamków

Pojawienie się języka, a z nim wynalezienie symboli umożliwiło przekształcanie przybliżonych reprezentacji wartości liczbowych w sprecyzowane reprezentacje liczb. Zdolność do kodowania wielkości liczbowych niezależnie od modalności i formy prezentacji jest warunkiem wstępnym do rozwoju umiejętności matematycznych (Dehaene, 1997). Wprowadzenie ułamków stanowiło kolejny krok, który pozwolił na poszerzenie zakresu i elastyczności systemu wielkości, a co za tym idzie – wyjście poza liczby całkowite.

Trudności ze zrozumieniem ułamków. Ułamki stanowią kluczowy element w opanowaniu algebry i wyższej matematyki. Wiedza o nich jest jednym z głównych działów edukacji matematycznej w szkole podstawowej. W przeciwieństwie do niesymbolicznych proporcji ułamki uważane są za niezrozumiałe i nieintuicyjne, pomimo faktu, że mają semantycznie jasną konstrukcję. Dzieci w szkole podstawowej nie rozumieją zapisu ułamków zwykłych. Smith, Solomon i Carey (2005) wykazali, że nie potrafią one uporządkować ułamków ani odpowiedzieć, dlaczego w danym ułamku są dwie liczby całkowite, a wiele z nich nawet zaprzecza, że istnieją liczby pomiędzy każdą parą sąsiadujących ze sobą na osi liczb naturalnych.

Gallistel i Gelman (2000) założyli, że uczenie się liczb całkowitych jest oparte na systemie liczb rzeczywistych. Stwierdzili więc, że jeśli wartości liczbowe są reprezentowane na kontinuum liczb rzeczywistych, to mentalne reprezentacje ułamków nie powinny być problematyczne dla osoby uczącej się ich. Jednak powszechnie znanym faktem jest to, że dzieci mają problemy z ich nauką (Smith, Solomon, Carey, 2005). Może być to związane z wymogiem postrzegania ułamka jako jednej wartości liczbowej zależnej od stosunku dwóch liczb całkowitych, a nie jako dwóch osobnych wartości liczbowych. Typowym błędem, który popełniają dzieci w zadaniach dotyczących ułamków jest np. odpowiedź, że 1/56 jest mniejsza od 1/75, bo 56 jest mniejsze od 75. Przez to zakłada się, że problemy dzieci z ułamkami są powiązane z ich wiedzą o wcześniej i częściej używanych liczbach całkowitych, które mogą zakłócać dzieciom nową koncepcję liczb wymiernych. Ni i Zhou (2005) nazwali ten efekt tendencją do skupiania się na liczbach całkowitych (ang. *whole number bias*). Smith, Solomon i Carey (2005) uważają, że konceptualna zmiana potrzebna do opanowania ułamków wymaga zrozumienia, że fizyczne wielkości (tak samo jak abstrakcyjne liczby) są ciągłe i nieskończenie podzielne.

Z drugiej strony niektórzy badacze sugerują, że dzieci jeszcze przed rozpoczęciem edukacji szkolnej wykazują spontaniczne rozumienie ułamków. Mix, Cohen-Levine i Huttenlocher (1999) pokazali, że nawet dzieci w wieku 4–6 lat potrafią dodawać i odejmować ułamki, które są prezentowane w postaci ćwiartek koła. Z kolei Gelman (2000) uważa, że dzieci rozwiązują tego typu zadania bez rozumienia koncepcji ułamków. Osiągają to raczej dzięki wykorzystaniu strategii percepcyjnych, takich jak wyliczanie ćwiartek. Stwierdzono więc, że dzieci potrzebują specjalnych instrukcji, aby wykonać takie zadanie. W innym badaniu, z udziałem dzieci w wieku od 3 do 7 lat, Bialystok i Codd (2000) zaobserwowali wzrost poziomu rozumienia liczb całkowitych wraz z wiekiem. Nie dotyczyło to jednak liczb wymiernych, dla których tylko siedmiolatki wykazały się umiarkowanym zrozumieniem ułamków.

Często zakłada się, że trudności w procesie uczenia pojęcia liczby wymiernej (związane ze skłonnością do przetwarzania liczby w formie ułamka jako dwóch oddzielnych liczb całkowitych) dotyczą tylko dzieci i nie powinny stanowić problemu dla dorosłych. Założenie to sprowadza się do rozumowania, że jeśli dorośli potrafią przetwarzać ułamek jako całość, to jego wartość liczbowa powinna być łatwo i bezpośrednio dostępna (poprzez dostęp do wartości liczbowych reprezentowanych na kontinuum liczb rzeczywistych). Badania nad podejmowaniem decyzji przeprowadzone przez Gigerenzera i Hoffrage'a (1999) pokazują natomiast, że ułamki są trudne do zrozumienia nawet dla dorosłych. Autorzy uważają, że znacznie łatwiejsze jest myślenie w kategoriach oddzielnych wartości liczbowych niż w kategoriach ułamków, proporcji czy częstości. Oznacza to, że posiadając reprezentację ułamka będącą wartością liczbową licznika i mianownika, nie ma bezpośredniego dostępu do wartości rzeczywistej ułamka, a wykształceni (mający za sobą lata edukacji) dorośli mogą obejść ten problem poprzez zastosowanie odpowiednich strategii poznawczych, które polegają na przetwarzaniu wartości liczbowych składowych danego ułamka (Butterworth, 2001).

Dowody z badań z udziałem dzieci będących przed rozpoczęciem edukacji szkolnej i wyedukowanych dorosłych sugerują, że trudności ze zrozumieniem ułamków nie można wiązać wyłącznie ze szkolną edukacją matematyczną. Gallistel, Gelman i Cordes (2006) twierdzą, że to język determinuje specjalny status liczb naturalnych, jednak może również odpowiadać za tworzenie koncepcji w procesie uczenia się ułamków. Dysponując unikalnymi oznaczeniami, jakimi są słowa (np. „połowa", „ćwierć") oraz symbole (np. ½, ¼) powtarzające się w tym samym kontekście i w tym samym znaczeniu, można stworzyć bazę nowych, unikalnych mentalnych reprezentacji. Teoria ogólnego kształcenia Perrucheta i Vintera (2002) dotycząca samoorganizacji świadomości (ang. *self-organized consciousness*, SOC) zakłada, że mentalne reprezentacje mogą się kształtować wraz z nabywaniem doświadczenia. Oznacza to, że każda intensywnie praktykowana umiejętność z dowolnej dziedziny (włączając w to przetwarzanie ułamków) może wykształcić swoją reprezentację w pamięci długotrwałej (ang. *long-term memory*, LTM), a zatem można wypracować sobie także mentalne reprezentacje ułamków. Taki pogląd jest zgodny z dowodami z badań pokazującymi, że doświadczenie w zakresie danej umiejętności prowadzi do tworzenia samodzielnych reprezentacji, które mogą być automatycznie kodowane, przechowywane i wydobywane (Gobet, 2005).

Przetwarzanie wartości liczbowych ułamków w perspektywie filogenezy i ontogenezy człowieka. Istnieją dowody na to, że proporcje nie są ewolucyjnie nowymi mentalnymi konstrukcjami. Wykazano np., że małpy przetwarzają stosunek dwóch długości linii (Vallentin, Nieder, 2008) oraz że stosunek ten jest kodowany przez pojedyncze neurony w przedczołowej korze makaka wyładowujące się maksymalnie dla określonej („preferowanej") proporcji. Pokazuje to, że mózg naczelnych jest zdolny do reprezentowania relatywnej ilości przy użyciu tego samego schematu kodowania, który stosowany jest dla liczb całkowitych (Nieder, Miller, 2003). To dowodzi, że przetwarzanie ułamków ma swoje biologiczne podłoże.

Z kolei badania z udziałem ludzi i wykorzystaniem funkcjonalnego rezonansu magnetycznego (ang. *functional magnetic resonance imaging*, fMRI) wykazały, że pewne populacje neuronów w obrębie bruzdy śródciemieniowej są zaprogramowane między innymi do przetwarzania wartości liczbowych ułamków, niezależnie od tego, czy są one prezentowane w zapisie arabskim czy słownym (Jacob, Nieder, 2009). Aby to stwierdzić, wykorzystano tzw. neuropsychologiczne zjawisko adaptacji (Krekelberg, Boynton, van Wezel, 2006), które opiera się na obserwacji, że powtarzająca się prezentacja niezmiennych bodźców (w tym przypadku była to wartość liczbowa ⅙) pociąga za sobą spadek aktywacji w obszarach wrażliwych na tę informację. Aby upewnić się, że ułamki są reprezentowane niezależnie od liczb całkowitych, użyty został szeroki zakres liczników i mianowników jako bodźców adaptacyjnych, przy zachowaniu jednak tej samej wartości liczbowej (np. $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{18}$). Ułamki, których wartość liczbowa lokowała się w pobliżu $\frac{1}{6}$, zmniejszały aktywację bruzdy śródciemieniowej, zaś w przypadku ułamków o wartościach wyraźnie mniejszych lub większych od $\frac{1}{6}$ można było zaobserwować jej wzmożone pobudzenie. Może to świadczyć o automatycznym przetwarzaniu liczb wymiernych.

Przeprowadzono też eksperyment, w którym zaobserwowano, że nawet niemowlęta są w stanie rozróżnić dwie proporcje liczby kropek, długo przed zapoznaniem się z koncepcją proporcjonalności w procesie edukacji (McCrink, Wynn, 2007). Wyniki te nawiązują do wrodzonej umiejętności przetwarzania liczb w formacie niesymbolicznym, jakim jest tzw. subitacja, czyli szybkie i dokładne oszacowanie liczby percypowanych elementów bez liczenia (przegl. Sobańska, Łojek, 2011), obserwowana zresztą również u różnych gatunków zwierząt (przegl. Trojan, 2013).

Automatyczne i intencjonalne przetwarzanie ułamków. Przetwarzanie automatyczne, czyli bez celowej kontroli, jest przeciwieństwem przetwarzania intencjonalnego. Można je zaobserwować, kiedy określona informacja jest niepotrzebna do spełnienia wymagań zadania, a zarazem nie jest korzystne intencjonalne jej przetwarzanie (Perlman, Tzelgov, 2006). Intencjonalne przetwarzanie informacji o wielkości liczbowej jest rezultatem intencjonalnych operacji wykonywanych (jeśli to potrzebne) na reprezentacjach przechowywanych w LTM. Aby zbadać automatyczne przetwarzanie ułamków, istotne jest kontrolowanie przetwarzania intencjonalnego. Pozwala to na sprawdzenie, które zmienne wpływają na przetwarzanie, kiedy wartości liczbowe ułamka są relewantne do zadania i które intencjonalne strategie są używane przez uczestników do przetwarzania tych wartości liczbowych (Kallai, Tzelgov, 2009).

Przykładem intencjonalnego przetwarzania wartości liczbowych mogą być zadania z porównywaniem liczb. Jednym ze wskaźników tego procesu jest efekt dystansu, mimo że został on zaproponowany jako wskaźnik przetwarzania automatycznego (Dehaene, Akhavein, 1995). Okazuje się jednak, że efekt ten nie występuje, gdy informacja o wartości liczbowej nie jest istotna do wykonania zadania (Tzelgov, Ganor-Stern, 2005), a więc może to być dowodem na intencjonalne przetwarzanie wartości liczbowych. Z kolei pojawienie się efektu zgodności wielkości (SiCE) dla par ułamków jest przykładem automatycznego dostępu do informacji o ich wartościach liczbowych.

Istotnym pytaniem jest to, czy zestaw liczb przechowywanych w LTM (a przez to odrębnych) jest ograniczony tylko do liczb naturalnych, czy też faktycznie dotyczy wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych (w celu utworzenia ciągłości), a zatem obejmuje też ułamki. MNL jako analogia do osi liczbowej wydaje się także sugerować ciągłą (jako kontinuum) reprezentację liczb wzdłuż niej rozmieszczonych (Dehaene, 2003). Automatyczne przetwarzanie ułamków oznaczałoby dostęp do takich mentalnych reprezentacji ich wartości liczbowych. To z kolei powinno umożliwiać szybkie porównywanie ułamków (np. $1/9$ z $1/5$).

Definicja automatyzmu jako procesu pobierania z pamięci zakłada, że informacja, która została pobrana automatycznie, jest reprezentowana jako samodzielna w LTM (Perruchet, Vinter, 2002). A więc jeżeli badani mimowolnie przetwarzają informację o wartości liczbowej, nawet jeśli nie jest ona wymagana w zadaniu, to można spodziewać się istnienia takiej samodzielnej reprezentacji przechowywanej w LTM. Informacja ta, jako irrelewantna do zadania, nie będzie wykorzystywana przy użyciu strategii intencjonalnych, więc może być identyfikowana jako pierwotna jednostka systemu poznawczego. Jednak przetwarzanie takich jednostek (wrodzone czy nabyte) jest związane tylko z automatycznym odzyskiwaniem z pamięci. Bardziej złożone jednostki nie są reprezentowane samodzielnie w LTM, a raczej są generowane intencjonalnie, zgodnie z wymogami określonego zadania. W związku z tym niektórzy badacze, porównując wyniki uzyskane w warunkach automatycznego i nieautomatycznego przetwarzania informacji o wartości liczbowej, zakładali możliwość istnienia dysocjacji pomiędzy nimi. W ten sposób Ganor-Stern, Tzelgov i Ellenbogen (2007) zaobserwowali takie różnice dla liczb dwucyfrowych, natomiast Tzelgov, Ganor-Stern i Maymon-Schreiber (2009) dowiedli, że dotyczy to również liczb ujemnych. Oznacza to, że te liczby nie są przetwarzane automatycznie.

Niektórzy jednak uważają, że reguły mogą być zautomatyzowane, ale jednocześnie nie być reprezentowane jako unikalne odrębnie w LTM (Tzelgov i in., 2000). Przykładem stosowania takich reguł w zakresie umiejętności matematycznych jest szybka odpowiedź w postaci wyników równań, które zawierają 0 (np. $X \times 0 = 0$). Regułą dla ułamków właściwych jest $X/Y < 1$, jednak to odwzorowuje ich unikalne wartości liczbowe i determinuje ich położenie na MNL (między 0 a 1) (Kallai, Tzelgov, 2009). Można by więc założyć, że ta reguła jest reprezentowana samodzielnie. Inni badacze uważają, że informacje takie mogą być samodzielnie reprezentowane w LTM, ale nie oznacza to ich automatycznego przetwarzania. Wynika to z definicji automatyzmu jako procesu pobierania z pamięci, w której nie ma wystarczająco dużo egzemplarzy albo w której ślad pamięciowy nie jest wystarczająco trwały (Perruchet, Vinter, 2002), aby zdeterminować odpowiedź.

Kallai i Tzelgov (2009) wysunęli dwie hipotezy mówiące, że wartości liczbowe ułamków są reprezentowane albo jako oddzielne wartości liczbowe (różne wartości dla różnych ułamków), albo w formie tzw. zgeneralizowanego ułamka (zapis każdego ułamka właściwego przedstawionego jako wyrażenie $X/Y < 1$ samodzielnie reprezentowanego na MNL). Wyniki ich badań pokazały, że ułamki są przetwarzane jako mniejsze od liczb całkowitych niezależnie od ich wartości liczbowych (czyli zgodnie z zasadą $X/Y < 1$), a dodatkowo reprezentacja zgeneralizowanego ułamka jest umieszczona na tej samej MNL, na której „rozmieszczone" są reprezentacje liczb naturalnych. Badacze równocześnie jednak stwierdzili, że przetwarzanie ułamków jest nieautomatyczne.

Badania nad efektem SNARC z wykorzystaniem ułamków

Efekt SNARC przejawia się jako istotna różnica między reakcją na bodźce zgodne i niezgodne. W dotychczasowych badaniach były to różnice między RT i/lub poprawnością odpowiedzi na liczby, których lokalizacja na MNL jest zgodna ze stroną reakcji i RT/poprawnością odpowiedzi na liczby, w przypadku których ta lokalizacja zgodna nie jest (Dehaene, Bossini, Giraux, 1993).

Badania z porównywaniem ułamków. Czy efekt ten dotyczy w takim samym stopniu ułamków, jak liczb całkowitych? Innymi słowy, czy wartości liczbowe ułamków mają swoje umysłowe reprezentacje rozmieszczone przestrzennie na MNL, podobnie jak liczby całkowite? Obecność efektu SNARC przy reagowaniu na ułamki powinna być odzwierciedlona przez relację pomiędzy stroną reagowania i wartością liczbową całego ułamka. Z kolei przetwarzanie jego komponentów – przez interakcję pomiędzy stroną reagowania i wartością liczbową licznika i/lub mianownika. To pozwala stwierdzić, czy przetwarzanie ułamków jest komponentowe czy holistyczne (czy przetwarzamy jego komponenty oddzielnie, czy traktujemy go jako całość). Bonato i współpracownicy (2007) przeprowadzili wiele eksperymentów wyjaśniających, w jaki sposób ułamki są mentalnie reprezentowane i przetwarzane. Do przeprowadzenia badań wykorzystano zadanie porównywania wartości liczbowych ułamków, aby określić siłę efektu dystansu i efektu SNARC. W pierwszym eksperymencie na ekranie wyświetlano ułamki zwykłe, gdzie licznikiem było 1, a mianownik był liczbą z zakresu od 1 do 9. Osoby badane miały wybrać prawą lub lewą ręką, czy prezentowany ułamek jest mniejszy czy większy od $\frac{1}{5}$. Jeśli wyświetlany ułamek był większy od $\frac{1}{5}$, badany miał wybrać prawy przycisk; jeśli ułamek był mniejszy niż $\frac{1}{5}$, badany miał wybrać lewy przycisk. Pozostałe eksperymenty Bonato i współpracowników różniły się jedynie zakresem porównywanych bodźców (inne wartości licznika i mianownika). Ich wyniki ujawniły odwrotny efekt SNARC, pokazując, że w przypadku ułamków zwykłych osoby dorosłe, przetwarzając je, oddzielnie traktują licznik i mianownik. Oznacza to, że są one przetwarzane na poziomie liczb całkowitych, a więc nie są percepowane holistycznie. Liczniki i mianowniki są porównywane oddzielnie, a przyjmowane przez badanych strategie przetwarzania są elastycznie dostosowane do sytuacji eksperymentalnej (bieżącego zadania). To odkrycie sugeruje, że dorośli nie posiadają samodzielnych odrębnych reprezentacji wartości liczbowych ułamków.

Podobne badania przeprowadzono również z udziałem dzieci (Liu i in., 2013). Zadanie polegało na porównywaniu wartości ułamków, jednak różniły się one tylko mianownikami, zaś w liczniku każdy z nich miał wartość 1. Zaobserwowano wystąpienie odwrotnego efektu SNARC (ponieważ im wyższe wartości mianownika, tym mniejsza jest wartość liczbowa całego ułamka) oraz efektu dystansu (ale dla mianowników dwóch porównywanych ułamków). Pokazuje to, że dzieci użyły MNL do reprezentacji ułamków, ale nie reprezentowały ich poprzez ich prawdziwe wartości, lecz poprzez ich składowe. Może to oznaczać, że w zależności od reprezentacji ułamków w umyśle wybierały odpowiednią strategię do wykonania zadania.

Badania z wartością liczbową irrelewantną dla zadania. Należy zwrócić uwagę, że w badaniach Bonato i współpracowników (2007) uczestnicy koncentrowali się na wartości liczbowej ułamka, którą musieli porównać z wartością referencyjną, a to mogło ich skłonić do korzystania z jakiejś celowej strategii. Na przykład ⅕ była wartością referencyjną w porównywaniu ułamków mających w liczniku liczbę 1. Mogło to wywołać strategię porównywania liczb całkowitych z mianowników (czyli zamiast ⅕ z ⅑ porównywana była 5 z 9). Podobnie liczba 1 jako wartość referencyjna mogła spowodować przyjęcie strategii porównywania licznika z mianownikiem ułamka (jeśli licznik jest większy, to cały ułamek jest większy od 1). Ponadto rodzaj zadania (instrukcji), polegającego na porównywaniu ze sobą dwóch liczb, niejako wymusza u badanego lokalizowanie ich wartości na MNL w celu określenia, która z nich „znajduje się" bardziej na lewo, a która – na prawo. Gdyby więc nawet badani nie stosowali strategii poznawczych opisanych powyżej, pojawienie się efektów dystansu i SNARC mogłoby wynikać z faktu, że wartość liczbowa była tu relewantna do zadania. To zaś mogłoby sprzyjać generowaniu zależności numeryczno-przestrzennej przypominającej uwagowy efekt SNARC, wywołany rodzajem instrukcji (czy liczba jest większa/mniejsza niż…?), podobny do tego opisanego przez Geversa, Reynvoeta i Fiasa (2003).

Skłania to do postawienia pytania, czy badając istnienie mentalnych reprezentacji ułamków na MNL i automatycznego dostępu do nich, nie należy stosować zadań, w których wartość liczbowa będzie irrelewantna. Można np. pytać o kolor przetwarzanego ułamka jako cechę niezwiązaną z wartością liczbową. Co prawda badania Fiasa, Lauwereynsa i Lammertyna (2001) wykazały, że w zadaniach z określeniem koloru prezentowanych liczb efekt SNARC nie pojawił się. Jednakże wyniki eksperymentu z użyciem ułamków dziesiętnych (Wróblewski, Gut, 2015) ujawniły istnienie tego efektu przy określaniu koloru (a więc wartości liczbowej irrelewantnej do zadania). Co więcej, efekt SNARC otrzymano w tych badaniach tylko w przypadku ułamków z jedną cyfrą po przecinku (od 0,1 do 0,9), podczas gdy nie wystąpił on dla ułamków z dwiema cyframi po przecinku (np. 0,15 czy 0,65). To z kolei tylko potwierdza, że wielocyfrowe ułamki dziesiętne generują te same rezultaty w przetwarzaniu co wielocyfrowe liczby naturalne (Barrouillet i in., 2004), takie jak np. trudność w uzyskaniu efektu SNARC. W tym kontekście warto wspomnieć, że jest to jedna z prawdopodobnych przyczyn bardzo częstych błędów w porównywaniu wartości liczbowych ułamków dziesiętnych. Jak relacjonują nauczyciele, nierzadko dziecko zapytane, który z dwóch ułamków – 0,8 i 0,65 jest większą liczbą, odpowiada, że 0,65 i wyjaśnia, że 65 jest większe od 8. Bardzo prostym sposobem, aby nauczyć poprawnego porównywania liczb niecałkowitych, jest w takich przykładach dopisać „0" na drugim miejscu po przecinku w ułamku reprezentującym liczbę dziesiętną z jedną cyfrą po przecinku, a następnie wskazać, że porównanie 0,65 i 0,80 to tak jak porównanie 65 z 80, z którym dziecko już zazwyczaj problemu nie ma. Forma ułamków zwykłych składa się z odwrotnej proporcji pomiędzy wartością liczbową ułamka i wartością liczbową mianownika, co sprawia, że są bardziej atrakcyjne w badaniu ich mentalnych reprezentacji. W ich przypadku z kolei błędy w operowaniu nimi wynikają ze stosowania wspomnianych wcześniej strategii poznawczych. I dlatego dziecko zapytane, co jest większe: $1/3$ czy $2/8$, nierzadko odpowie (błędnie), że $2/8$ (kierując się tym, że i w liczniku, i w mianowniku tego ułamka są większe wartości liczbowe niż w liczniku i mianowniku ułamka $1/3$).

Kolejne pytania, które warto postawić, to jakie znaczenie ma częstość używania ułamka w codziennym doświadczeniu dla „dostępności" do jego reprezentacji, a ponadto czy wcześniejsza ekspozycja na wartości liczbowe ułamków (kontekst przetwarzanych bodźców) wpłynie na pojawienie się efektu SNARC. Teoria ogólnego kształcenia SOC Perrucheta i Vintera (2002) zakłada bowiem, że mentalne reprezentacje mogą powstać wraz z nabywaniem doświadczenia, a zatem praktykowana umiejętność (czyli informacja o wielkości liczbowej ułamka) może stworzyć swoją reprezentację w LTM. Co więcej, badania nad wpływem kontekstu i obciążenia pamięci krótkotrwałej na występowanie efektu SNARC (przegl. Fias, van Dijck, Gevers, 2011) wskazują, że „trening" polegający na porównywaniu ułamków poprzedzających właściwe zadanie może generować wyraźną zależność numeryczno-przestrzenną, nawet jeśli wartości ułamków są irrelewantne.

Zakończenie

Przegląd danych z badań, który tu przedstawiono, potwierdza, że proces przetwarzania ułamków nie tylko jest odmienny od tego dotyczącego liczb całkowitych, ale też generuje korzystanie ze specyficznych strategii poznawczych w operowaniu tymi szczególnymi wartościami liczbowymi. W rezultacie obserwuje się np. brak efektów behawioralnych typowych dla liczb jednocyfrowych, takich jak efekt SNARC, co może być interpretowane jako brak przestrzennej reprezentacji poznawczej w przypadku ułamków (brak ich uszeregowania na MNL). Badania nad przetwarzaniem ułamków pokazują również, że operowanie ich reprezentacjami umysłowymi nie jest wyłącznie rezultatem doświadczenia i praktyk edukacyjnych, o czym świadczą zaprezentowane tu wyniki badań na zwierzętach czy z udziałem małych dzieci. Nie neguje to jednak znaczenia czynników środowiskowych w umiejętności operowania ułamkami, gdyż na podstawie wiedzy na temat procesów poznawczych zaangażowanych w operowanie takim materiałem numerycznym można opracowywać skuteczne metody ułatwiające naukę ułamków (jak np. wspomniane dopisywanie „0" na drugim miejscu po przecinku przy porównywaniu ułamków dziesiętnych) oraz zrozumieć, na czym polega trudność w posługiwaniu się nimi. Dodatkowo, biorąc pod uwagę wpływ ćwiczenia porównywania ułamkamków i codziennych doświadczeń w operowaniu nimi na kształtowanie się ich przestrzennych reprezentacji na MNL, warto rozważyć zasadność stosowania takich metod edukacyjnych, które trenowałyby działania na ułamkach w odniesieniu do ich uszeregowania na osi liczbowej. Liczne badania dowodzą korzystnego wpływu treningów poznawczych opartych na MNL na umiejętności matematyczne dzieci (np. Kucian i in., 2011), więc analogiczne efekty dałyby one prawdopodobnie w przypadku takiego materiału jak ułamki. Wyniki dotychczasowych badań są ponadto dobrym punktem wyjścia do kolejnych pytań badawczych, które tu zasugerowano i na które warto poszukać odpowiedzi w badaniach eksperymentalnych.

Literatura cytowana

Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P., Seron, X. (2004). ADAPT: A developmental, asemantic and procedural model for transcoding from verbal to arabic numerals. *Psychological Review, 111*(2), 368–394.

Bialystok, E., Codd, J. (2000). Representing quantity beyond whole numbers: Some, none, and part. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*, 117–128.

Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology, 33*, 1410–1419.

Buckley, P.B., Gillman, C.B. (1974). Comparisons of digits and dot patterns. *Journal of Experimental Psychology, 103*, 1131–1136.

Butterworth, B. (2001). "What makes a prodigy?" *Nature Neuroscience, 4*(1), 11–12.

Calabria, M., Rossetti, Y. (2005). Interference between number processing and line bisection: A methodology. *Neuropsychologia, 43*, 779–783.

Campbell, J.I.D., Clark, J.M. (1988). An encoding-complex view of cognitive number processing: Comment on McCloskey, Sokol, and Goodman (1986). *Journal of Experimental Psychology: General, 117*, 204–214.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1–42.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber-Fechner law: A logarithmic mental number line. *Trends in Cognitive Sciences, 7*, 145–147.

Dehaene, S., (2005). Evolution of human cortical circuits for reading and arithmetic: The "neuronal recycling" hypothesis. W: S. Dehaene, J.R. Duhamel, M. Hauser, G. Rizzolatti (red.), *From Monkey Brain to Human Brain* (s. 133–158). Cambridge, MA: MIT Press.

Dehaene, S., Akhavein, R. (1995). Attention, automaticity, and levels of representation in number processing. *Journal of Experimental Psychology, 21*, 314–326.

Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P. (1993). The Mental Representation of Parity and Number Magnitude. *Journal of Experimental Psychology, 122*, 371–396.

Dehaene, S., Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition, 1*, 83–120.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., Wilson, A. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology, 14*, 218–224.

Dehaene, S., Naccache, L., Le Clech, G., Koechlin, E., Mueller, M. (1998). Imaging unconscious semantic priming. *Nature, 395*, 597600.

Fias, W., Lauwereyns, J., Lammertyn, J. (2001). Irrelevant digits affect feature-based attention depending on the overlap of neural circuits. *Cognitive Brain Research, 12*(3), 415–423.

Fias, W., van Dijck, J.P., Gevers, W. (2011). How number is associated with space? The role of working memory. W: S. Dehaene, E. Brannon (red.), *Space, Time and Number in the Brain* (s. 133–148). London: Elsevier.

Fischer, M., Castel, A., Dodd, M., Prat, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neuroscience, 6*, 555–556.

Gallistel, C.R., Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: From reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences, 4*(2), 59–65.

Gallistel, C.R., Gelman, R., Cordes, S. (2006). The cultural and evolutionary history of the real numbers. W: S.C. Levinson, P. Jaisson (red.), *Evolution and Culture: A Fyssen Foundation Symposium* (s. 247–274). Cambridge, MA: MIT Press.

Ganor-Stern, D., Tzelgov, J., Ellenbogen, R. (2007). Automaticity and two-digit numbers. *Journal of Experimental Psychology, 33*(2), 483.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27–37.

Gevers, W., Reynvoet, B., Fias, W. (2003). The mental representation of ordinal sequences is spatially organized. *Cognition, 87*(3), B87–95.

Gigerenzer, G., Hoffrage, U. (1999). Helping people overcome difficulties in Bayesian reasoning: A reply to Lewis and Keren (1999) and Mellers and McGraw (1999). *Psychological Review, 106*, 425–430.

Gobet, F. (2005). Chunking models of expertise: Implications for education. *Applied Cognitive Psychology, 19*, 183–204.

Gross, H., Pahl, M., Si, A., Zhu, H., Tautz, J., Zhang, S. (2009). Number-based visual generalisation in the honeybee. *PloS One, 4*(1), e4263.

Henik, A., Tzelgov, J. (1982). Is three greater than five: The relation between physical and semantic size in comparison tasks. *Memory & Cognition, 10*, 389.

Hubbard, E., Piazza, M., Pinel, P., Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience, 6*, 435–448.

Jacob, S.N., Nieder, A. (2009). Notation-Independent Representation of Fractions in the Human Parietal Cortex. *The Journal of Neuroscience, 29*, 4652–4657.

Kallai, A., Tzelgov, J. (2009). A generalized fraction: An entity smaller than one on the Mental Number Line. *Journal of Experimental Psychology, 35*, 6, 1845–1864.

Kirjakovski, A., Utsuki, N. (2012). From SNARC to SQUARC: Universal Mental Quantity Line? *International Journal of Psychological Studies, 4*, 217–227.

Krekelberg, B., Boynton, G.M., van Wezel, R.J.A. (2006). Adaptation: From single cells to BOLD signals. *Trends in Neuroscience, 29*(5), 250–256.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage, 57*, 782–795.

Liu, C., Xin, Z., Lin, C., Thompson, C.A. (2013). Children's mental representation when comparing fractions with common numerators. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, 33*, 175–191.

McCloskey, M., Caramazza, A., Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain & Cognition, 4*, 171–196.

McCrink, K., Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Journal of Psychological Science, 18*(8), 740–745.

Menon, V., Rivera, S.M., White, C.D., Glover, G.H., Reiss, A.L. (2000). Dissociating prefrontal and parietal cortex activation during arithmetic processing. *NeuroImage, 12*, 357–365.

Mix, K.S., Cohen-Levine, S., Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology, 35*, 164–174.

Moyer, R.S., Landauer, T.K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature, 215*, 1519–1520.

Ni, Y., Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*, 27–52.

Nieder, A., Miller, E.K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron, 37*(1), 149–157.

Noël, M., Seron, X., (1993). Arabic Number Reading Deficit: A Single Case Study or When 236 Is Read (2306) and Judged Superior to 1258. *Cognitive Neuropsychology, 10*(4), 317–339.

Nuerk, H., Wood, G., Willmes, K. (2005). The Universal SNARC Effect: The Association between Number Magnitude and Space is Amodal. *Experimental Psychology, 52*, 187–194.

Perlman, A., Tzelgov, J. (2006). Interactions between encoding and retrieval in the domain of sequence-learning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 32*, 118–130.

Perruchet, P., Vinter, A. (2002). The self-organized consciousness. *Behavioral and Brain Sciences, 25*, 297–388.

Rugani, R., Vallortigara, G., Priftis, K., Regolin, L. (2015). Number-space mapping in the newborn chick resembles humans' mental number line. *Science, 347*(6221), 534–596.

Schwarz, W., Keus, I.M. (2004). Moving the eses along the mental number line: Comparing the SNARC effects with saccadic and manual responses. *Perception & Psychophysics, 66*, 651–664.

Schwarz, W., Müller, D. (2006). Spatial associations in number-related tasks: A comparison of manual and pedal responses. *Experimental Psychology, 53*, 4–15.

Smith, C.L., Solomon, G.E.A., Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology, 51*, 101–140.

Sobańska, M., Łojek, E., (2011). *Struktura umysłu a wykonywanie prostych działań arytmetycznych. Badania neuropsychologiczne*. Warszawa: Difin.

Trojan, M. (2013). *Na tropie zwierzęcego umysłu*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.

Tzelgov, J., Ganor-Stern, D. (2005). Automaticity in processing ordinal information. W: J.I.D. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 55–67). New York: Psychology Press.

Tzelgov, J., Ganor-Stern, D., Maymon-Schreiber, K. (2009). The representation of negative numbers: Exploring the effects of mode of processing and notation. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 62*, 444–452.

Tzelgov, J., Yehene, V., Kotler, L., Alon, A. (2000). Automatic comparisons of artificial digits never compared: Learning linear ordering relations. *Journal of Experimental Psychology, 26*, 103–120.

Vallentin, D., Nieder, A. (2008). Behavioral and prefrontal representation of spatial proportions in the monkey. *Current Biology*, *18*, 1420–1425.

Von Aster, M.G., Shalev, R.S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology, 49*(11), 868–873.

Verguts, T., van Opstal, F. (2005). Dissociation of the distance effect and size effect in one-digit numbers. *Psychonomic Bulletin & Review, 12*, 925–930.

Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: Common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences, 7*, 483–488.

Wróblewski, R., Gut, M. (2015). Spatial-Numerical Association of Response Codes (SNARC) effect for mental representations of fractions. Plakat konferencyjny zaprezentowany na Aspects of Neuroscience w Warszawie.

Streszczenie. Zagadnienie umysłowych reprezentacji liczb, ich kształtowania się w rozwoju i neuronalnego podłoża jest stosunkowo dobrze poznane i udokumentowane w literaturze. Z badań tych wiadomo między innymi, że istnieje bardzo ścisły związek między umysłowymi reprezentacjami liczb i przestrzeni, co ilustruje koncepcja uporządkowania liczb na tzw. Mentalnej Osi Liczbowej. Doniesienia z badań nad tą zależnością dotyczą jednak głównie liczb całkowitych, zaś analogiczne badania nad poznawczymi reprezentacjami ułamków są nieliczne i dają niejednoznaczne rezultaty. Niniejszy artykuł stanowi próbę przeglądu dotychczasowej literatury dotyczącej tego tematu z odniesieniem do neuronalnych i behawioralnych korelatów mentalnych reprezentacji liczb niecałkowitych, jak również metod ich badania. Stawiane są też pytania, mogące stanowić punkt wyjścia do dalszych dociekań w tym zakresie.

Słowa kluczowe: poznanie matematyczne, efekt SNARC, ułamki, umiejętności matematyczne

Data wpłynięcia: 10.05.2017
Data wpłynięcia po poprawkach: 26.05.2019
Data zatwierdzenia tekstu do druku: 28.11.2019